

Evangelista Torricelli

○ Wymierzaniu Cykloidy

Gdzie problem wymierzania cykloidy został rozwiązany na III sposoby;
według Starej Geometrii
i za pomocą Geometrii Niepodzielnych

AD 1644

Z łaciny XVII-wiecznej
na język polski
przetłumaczyli

Julia Tazbir i Wacław Zawadowski

AD 1994

Introduction

This short paper on measuring the cycloid appeared in print some 350 years ago in Italy as an appendix to Torricelli's treatise "On measuring the parabola". The problem of cycloid was then well known. In Italy, the first to consider the cycloid was Galileo and then his disciples Cavalieri, Torricelli and Viviani. In France the cycloid also occupied the thoughts of Mersenne, Roberval, Fermat, Pascal and Descartes. In England, Sir Christopher Wren, better known as the architect of St Paul's cathedral, also made a contribution to thinking about the cycloid.

Galileo had tried to find the area under the cycloid curve. He suspected that this area was "three times the rolling circle". Not being able to prove it, he weighed physical shapes on the scale and came to the conclusion that the area under the cycloid might be less than this. He seems to have got no further with the problem. The Appendix of Torricelli was the first printed solution of the problem.

The short text of Torricelli has great charm of its own and gives us some insight into the style of mathematics in first half of the seventeenth century. The Appendix was a small attachment to a monograph "De Dimensione Parabolæ", whose aim was to present 20 proofs of the same statement about the area of the parabola, well known since Antiquity. This was the quadrature of the parabola, determining the area between parabola and its secant. So why should he present 20 proofs and not just one? Of course, it was a display of his virtuosity as a mathematician, but there was another motivation. Just a few years before, Cavalieri had formulated his principle of determining the area of some shapes, plane or solid, by the method of indivisibles. Although Cavalieri's principle was broadly accepted, there was still some residual uncertainty. A proof by the new principle which could be confirmed by more traditional methods was one way to establish greater confidence. Torricelli presented ten different proofs by the usual geometric method of exhaustion in euclidean style, and then ten different proofs using the new language of indivisibles. The structure of the whole monograph is interesting not so much for the content, but more for the language and style.

The Appendix on the cycloid demonstrates on a smaller scale this juxtaposition of proofs in the old and new style. In translating the original text of Torricelli we have tried to preserve the original style and some features of the vocabulary. He did not use the word "area", but used "space" instead. He had no concept of measure, for his concept of real number was just beginning to emerge. Instead he used expressions like "a rectangle which is equal to two circles". The Torricelli text is one of the first to use infinite sets freely. We find "and so on to infinity" and he compares "all lines together" in a certain shape with "all lines" in another. This represents a significant development in mathematical thinking. It is a continuation from the first steps made by Archimedes. Torricelli's text on the cycloid shows the emergence of a new language, which gave mathematics in the seventeenth century new power.

Krótką rozprawę Torricellego o wymierzaniu cykloidy ukazała się drukiem jako dodatek do większego dzieła „O Wymierzaniu Parabol” w roku 1644. W tym czasie problem cykloidy był już znany. We Włoszech zajmował się cykloidą Galileusz, a potem Cavalieri, Torricelli i Viviani, którzy byli uczniami Galileusza. We Francji zajmowali się cykloidą Mersenne, Roberval, Pascal, Kartezjusz i inni. W Anglii Wallis i Christopher Wren. Appendix Torricellego był pierwszą drukowaną wzmianką, w której przedstawiono zagadnienie i jego rozwiązanie. Ta króciutka wzmianka ma swój wielki wdzięk. Daje dobre wyobrażenie o stylu w jakim uprawiano matematykę, w pierwszej połowie XVII wieku, jakimi posługiwano się pojęciami, jakiego używano języka.

Przed wszystkim rzuca się w oczy miejsce – otoczenie w którym się pojawiła. Traktat Torricellego „De Dimensione Parabolæ” po prostu miał przedstawić 20 różnych dowodów tego samego faktu, znanego od starożytności – o tym, że pole między parabolą i jej cięciwą jest równe dwóm trzecim pola trójkąta, którego bokami są, ta właśnie cięciwa i dwie styczne do paraboli wystawione na końcach tej cięciwy. Takie pomyślne obliczanie i w końcu obliczenie pola pewnego obszaru nazywano kwadraturą. Dawalo to bowiem teoretyczną możliwość narysowania kwadratu o polu równym rozważanemu polu. To początkowo poglądowe wyrażenie „kwadratura” stało się z biegiem czasu idiomem wyrażającym poszukiwanie miary obszaru.

Nasuwa się pytanie dlaczego aż 20 dowodów. Czy nie wystarczyłby jeden? Widocznie nie chodziło o sam fakt. Do tego wystarczyłby jeden dowód. W tym czasie inny uczeń Galileusza Bonaventura Cavalieri sformułował ogólną zasadę wyznaczania miary obszarów płaskich i przestrzennych. Chodziło może o sprawdzenie tej zasady i potwierdzenie, że jest ona dobra, a przy okazji wykazanie się pewną pomysłowością. Torricelli podał 10 dowodów kwadratury paraboli nie używając zasady Cavalieriego a następnie 10 z jej użyciem. Swoją budową przypomina to trochę „Exercice de style” Raymonda Queneau. Trzeba dodać, że matematycy na początku XVII wieku nie byli pewni siebie. Szukali potwierdzenia dla swoich wywodów. Chodziło też może o niezależne sprawdzenie wywodów samego Archimedes.

Tekst Torricellego staraliśmy się przedstawić w możliwie wiernym przekładzie. Warto zwrócić uwagę na styl i zasób słów, który jest dość skąpy. Na przykład Torricelli nie używa słowa „powierzchnia”. Zamiast tego mówi „przestrzeń”. Natomiast jest to jeden z pierwszych tekstów, w których swobodnie mówi się „i tak dalej do nieskończoności” i porównuje się „wszystkie linie na raz” w pewnym obszarze z pewnymi innymi liniami „wszystkimi na raz” w innym obszarze. Mówiąc naszym językiem, są to początki uznawania istnienia zbiorów nieskończonych w matematyce. Te początki były zrobione przez Archimedes w starożytności. Tu jest dalszy etap. Tekst Torricellego pokazuje jak powstawał nowy język, który dał matematyce ogromną siłę.

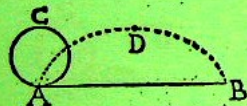
85 APPENDIX De Dimensione Cycloidis.

HIC B E T hic appendicis loco addere solutionem problematis non inuicendi, & si materia, propositionemque spectes, primo intuitu difficilissimi. Torsit hoc, fefellitq. pluribus ab hinc annis Mathematicas nostri seculi primarios; frustra enim tentata demonstratio euasit ab illorum manibus ob fallaciam experientis. Appensis namque ad libram manufactam spatij figurarum materialibus, nescio quo fato, ea proportio que uere tripla est; semper minor, quā tripla apparuit. Unde factum est, quod potius ob suspicionem incommensurabilitatis (ut ego credo) quā ob desperationem demonstrationis, instituta contemplatio ab illis dimissa sit.

Suppositum est huiusmodi. Concipiatur super manente aliqua recta linea ab. circulus ac, contingens rectam ab. in puncto a. Noteturq. punctum a, tamquā fixum in peripheria circuli ac. Tum intelligatur super manente recta ab. conuerti circulum ac, motu circulari simul & progressiuo versus partes b: ita ut subinde aliquo sui puncto recta linea ab semper contingat, quousq. fixum punctum iterum ad contactum reuertatur, puta in b. Certum est, quod punctum a fixum in peripheria circuli rotantis ac, aliquam lineam describet, surgentem primò à subiecta linea ab, deinde culminantem versus d; postremo pronam, descendētemque versus punctum b.

Vocata est à prædecessoribus nostris. Præcipue à Galileo iam supra 45. annum, huiusmodi linea ad b. Cyclois, recta uero ab. basis cycloidis; At circulus ac, genitor cycloidis.

Proprietas, & natura cycloidis ea est, ut basis ipsius ab. equalis



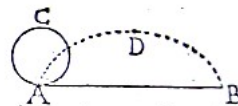
85 DODATEK

o wymierzaniu cycloidy

Chciałbym w tym przyczynku dodać rozwiązanie problemu bardzo wdzięcznego i, jeżeli popatrzyś na treść i temat, przy pierwszym zastanowieniu bardzo trudnego. Mylił i łudził on od wielu lat matematyków naszego wieku najprzedniejszych; daremnie, albowiem próba dowodu wymykała się z ich rąk z powodu fałszu doświadczenia. Zawieszając bowiem na wadze modele materialne powierzchni figur, nie wiem jakim wyrokiem losu, proporcja, która w rzeczywistości jest potrójna na zawsze okazywała się mniejsza niż potrójna.

Stąd stało się, że raczej z powodu podejrzenia o niewspółmierność (jak sądzę) niż z powodu zwątpienia w dowód rozpoczęte rozważania zostały przez nich porzucone.

Teza jest taka. Przyjmijmy, że na pewnej ustalonej linii prostej AB okrąg AC styczny do prostej AB w punkcie A. Ustalmy punkt jako stały na obwodzie okręgu AC. Teraz wyobraźmy sobie,



że na tej ustalonej prostej okrąg AC obraca się jednocześnie ruchem obrotowym i postępowym w stronę punktu B: tak, aby bezpośrednio jakimś swoim punktem dotykał linii prostej AB aż dotąd, dopóki ustalony punkt powtórnie nie wróci do styczności w punkcie B. Pewne jest, że punkt A umieszczony na obwodzie obracającego się koła AC, zakreśli pewną linię, najpierw wznoszącą się od leżącej niżej linii AB, następnie górującą około punktu D, potem chyłącą się, zstępującą do punktu B.

Nazywana była taka linia ADB cycloidą przez poprzedników naszych, zwłaszcza przez Galileusza już od ponad 45 lat, zaś prosta AB podstawą cycloidy a okrąg AC rodzicem cycloidy (jej generatorem, okręgiem tworzącym).

Własność i natura cycloidy jest taka, że jej podstawa AB rów-

Appendix

qualis sit peripheria circuli genitoris. ac. Quod quidem non addo obscurum est. Nam tota peripheria a c se ipsam in conuersione commensurans super manente recta ab.

Quæritur nunc quàm proportionem habeat spatium cycloidalæ adb ad circulum suum genitorem ac? Ostendemusque, Deodante, triplum esse. Demonstrationes tres erunt, inter se penitus diuersæ. Prima, & tertia per nouam Induisibilem Geometriam nobis amicissimam procedent: secunda uero per duplicem positionem, more veterum recepto; ut utrisque fautoribus satisfiat. Ceterum, hoc moneo; principia ferè omnia, quibus aliquid per Induisibilem Geometriam demonstratur, ad solam antiquorum demonstrationem indirectam reduci posse: quod à nobis factum est, ut in multis alijs, ita etiam in primo, & tertio sequentium Theorematum; sed ne lectoris patientia nimium adhuc abuteretur, plura omittenda censuimus, tresq; tantum demonstrationes exhibemus.

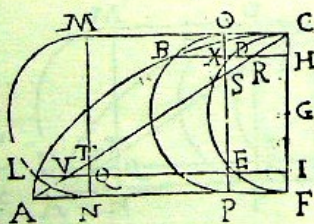
THEOREMA I.

Omne spatium quod sub linea Cycloide, & recta eius basi continetur, triplum est circuli sui genitoris; siue sesquialterum trianguli eandem basim, & eandem altitudinem habentis.

Est Cyclois linea abc descripta à puncto c circuli cd ef dum ipse circumuertitur super manente basi af. (consideramus autem semicycloidem, & semicirculum tantum ad euitandam figuræ confusionem.) Dico spatium abc f triplum esse semicirculi cd ef; siue sesquialterum trianguli acf,

Accipiantur duo puncta h, & i in diametro cf. æquè remota à centro g. Ductisq; hb, il cm æquidistanter ipsi fa, transeant per puncta b, & l semicirculi obp, mln, æquales ipsi cdf, & contingentes basim in punctis pn.

Naniste-



na jest obwodowi okręgu tworzącego AC. To zaś jest jasne ponieważ cały obwód AC, przy obrocie, sam się wymierza stałej prostej AB.

Należy teraz zapytać jaki jest stosunek przestrzeni cykloidalnej ADB do powierzchni koła AC, które ją tworzy? I pokażemy, że jest trzy razy większa. Dowody będą trzy, całkiem różne. Pierwszy i trzeci dokonują się przez nową Geometrię Niepodzielną, nam najbliższą; drugi zaś przez podwójne zaprzeczenie, metodą starożytną aby zwolennicy jednych i drugich (metod) byli zadowoleni. Zresztą, co przypominam, prawie wszystkie zasady, według których dowodzi się czegokolwiek przez Geometrię Niepodzielną, mogą być zredukowane do zwykłego dla starożytnych dowodu niewprost: co przez nas jest dokonane jak i wielu innych, także w pierwszym i trzecim z następujących twierdzeń; lecz, aby cierpliwości czytelnika zbyt nie nadużyć, sądzimy, że wiele należy pominąć i tylko trzy dowody pokazujemy.

TWIERDZENIE I

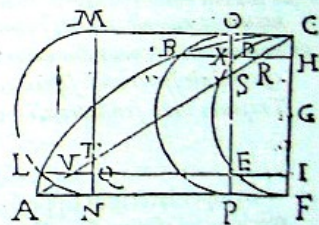
Cała powierzchnia, która zawiera się między linią cycloidy i prostą, jej podstawą, jest trzy razy taka, jak koło, ją tworzące; lub też półtora razy taka, jak trójkąt, mający taką samą podstawę i taką samą wysokość.

Niech będzie linia cycloidy

ABC opisana przez punkt C okręgu CDEF gdy on sam toczy się po stałej podstawie AF. (przyjmujemy zatem półcycloidę i półokrąg tylko dla uniknięcia zagmatwania rysunku.) Twierdzę, że powierzchnia ABCF jest trzy razy taka, jak półowka koła CDEF; lub półtora raza taka, jak trójkąt ACF,

Przyjmijmy dwa punkty H oraz I na średnicy CF, równoodalone od środka G. (Przyjmijmy też, że) poprowadzone HB, IL, CM równoległe do tej samej FA przechodzą przez punkty B oraz L półokręgów OBP, MLN, równych temuż CDF i stycznych do podstawy w punktach P oraz N.

Widocz-



De Cycloide.

87

Manifestum est rectas, hd , ie , xb , ql aequales esse, per 14. Tercij, aequalesq. erunt arcus ob , ln . Item cum aequales sint ch if , aequales erunt cr , ua , ob parallelas.

Tota peripheria mln , ob cycloidem, aequalis est recte af . itaque arcus ln recta an ob eandem causam, cum arcus ln seipsum super recta an commensuraverit, ergo reliquus arcus lm , reliqua recte nf equalis erit. Eodem ratione arcus bp , recte ap , & arcus bo recte pf , aequalis erit.

Iam recta an aequalis est arcui ln , sine arcui bo , sine recte pf . Ergo ob parallelas, aequales erunt at , sc . Verum quia aequales erant etiam cr , au , relique ut, fr aequales erunt. Propterea in triangulis aequiangulis, utq. rlx , aequalia erunt latera homologa uq , xt . Patet itaque quod duae recte lu , br simul sumptae aequales erunt duabus rectis lq , bx , nempe ipsis, ei , dh , & hoc semper verum erit ubicunq. sumantur duo puncta h , & i , dummodo aequaliter a centro sint remoti. Ergo omnes lineae figurae $albeca$ aequales sunt omnibus lineis semicirculi $cdef$; & ideo figura bilinearis $albeca$ aequalis erit semicirculo $cdef$.

Sed triangulum acf duplum est semicirculi $cdef$. (nam triangulum acf reciprocum est triangulo Propos. pr. Arch. de dimens. circ. cum latus a semiperipheriae, latus vero fc diametro sit aequale, unde sequitur triangulum acf aequale esse integro circulo cuius diameter sit cf). Ergo componendo, totam cycloidale spatium sesquialterum erit trianguli inscripti acb . Triplum vero semicirculi $cdef$. Quod erat.

Lemma.

Si super lateribus oppositis alicuius trianguli AF , duo semicirculi descripti sint, EIf , AGD , tunc figura sub peripherijs, & sub reliquis lateribus comprehensa aequalis predicto triangulo.

Vocetur autem alia figura Arcuatum, tam si fuerit integra, quam etiam ipsius partes, quando secta fuerit a linea ipsi fd parallela.

Demon-

O CYKLOIDZIE

87

Widoczne jest, że proste HD , IE , XB , QL są równe, i że na mocy Podania 14. Księgi III (Elementów Euklidesa) równe są łuki OB , LN . Więc gdy równe są CH oraz IF , równe będą CR oraz UA , przez analogię.

Cały obwód MLN przed cykloidą (z lewej strony cykloidy) równy jest prostej AF a zatem łuk LN (równy jest) prostej AN z tego samego powodu, co łuk LN samym sobą się na prostej AN wymierza, pozostały łuk BP będzie równy NF , pozostałemu kawałkowi prostej. I z tego samego powodu łuk BP prostej AP , i łuk BO prostej PF będzie równy.

Już prosta AN równa jest łukowi LN , czyli łukowi BO , czyli prostej PF . Więc przez analogię, równe będą AT , SC . Zaś ponieważ równe będą CR , AU pozostałe UT , SR będą też równe. Dlatego w trójkątach równokątnych UTQ , RSX równe będą odpowiednie boki UQ , XR . Jasne jest przeto, że dwie proste LU , BR razem wzięte będą równe dwóm prostym LQ , BX a tym samym EI , DH (razem wziętym) i to zawsze będzie prawdą, gdziekolwiek będą wzięte dwa punkty H oraz I jeżeli tylko będą jednakowo oddalone od środka. Zatem wszystkie linie figury $ALBCA$ są równe wszystkim liniom półkola $CDEF$; i przeto figura dwuliniowa $ALBCA$ będzie równa półkolu $CDEF$.

Lecz trójkąt ACF jest dwa razy taki jak półkola $CDEF$. (ponieważ trójkąt ACF jest odwrotny do trójkąta przedłożonego przez Archimedes'a w "O wymierzaniu koła", gdy bok AF równy jest półokręgowi zaś FC średnicy, skąd wynika, że trójkąt ACF równy jest całemu okręgowi, którego średnicą jest CF). Zatem składając razem, cała powierzchnia cykloidy jest półtora razy taka, jak trójkąt ACB opisany wyżej, a zatem trzy razy taka, jak półówka koła $CDEF$. Co było do ...

Lemat I

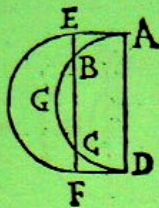
Jeżeli na bokach przeciwnych dowolnego prostokąta AF zostaną narysowane dwa półokręgi, EIf , AGD , to figura zawarta między ich obwodami i pozostałymi bokami jest równa rzeczonemu prostokątowi.

Nazwana jest taka figura Łukowcem; cała albo jej części, które powstaną, gdy będzie przecięta linią do FD równoległą.

Dowodzi

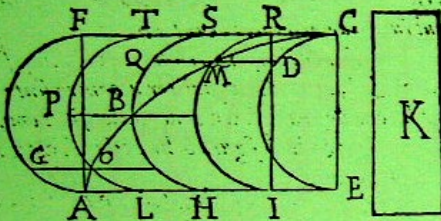
Demonstratur; quoniam cum sint aequales semicirc. dempto communi segmento b g c, additisque communibus trilineis e b a, c f d. clarum erit propositum.

Quando vero detur casus quod segmentum nullum sit, tunc brevior. faciliusq. demonstratio erit. Facile etiam per eandem prosthapheresim ostenditur arcuatum sectum à linea ipsi f d parallela equale esse rectangulo aequale, & super eadem basi constituto.



Lemma I I.

Est linea cycloidalis a b c descripta à puncto c semicirculi c d e adum conuertitur super manente a c. Compleatur rectangulum a f c e,



fiatq. circa diametrum a f semicirculus a g f. Dico cycloidem a b c secare bifariam arcuatum a g f c d e.

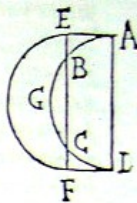
Si enim ita non est, erit utiq. alterum ex duobus trilineis f g a b c, a b c d e, magis quam dimidium eiusdem arcuati. Est & ponatur alterum ex ipsis (quodcumq. sit) puta a b c d e magis quam dimidium arcuati. Sitq. excessus, quo trilineum superat semissem arcuati, aequalis spatio cuidam K.

Secetur bifariam a e in h; & iterum h e in i; & sic fiat semper donec rectangulum aliquod i e c minus reperiatur spatio K. Tunc dividatur integra a e in particulas aequales ipsi i e, & per puncta diuisionum l, h, i, transcant semicirculi aequales ipsi c d e semicirculo, tangentes basim in punctis l, h, i, secantesq. cycloidem in o, b, m, per quae puncta agantur recta g o, p b, q m d aequidistantes basi a c.

Eri

Dowodzi się: ponieważ półokręgi są równe, po odjęciu wspólnej części BGC i dodaniu trzyliniowców EBA oraz CFD, proponowana teza staje się jasna.

Kiedy zaś dany będzie przypadek, że nie byłoby wspólnej części dowód będzie jeszcze krótszy i łatwiejszy. Łatwo bowiem przez ich odejmowanie pokazać, że łukowiec przecięty przez linię do samej FD równoległą jest równy prostokątowi o takiej samej wysokości i zbudowanemu na tej samej podstawie.



Lemat II.

Niech będzie linia cycloidy ABC opisana od punktu C półokręgiem CDE, który toczy się po stałej AE. Uzupełnijmy prostokąt AFCE, tak aby wokół AF powstało półkole

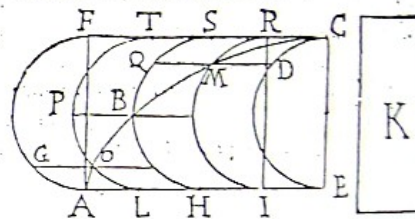
AGF. Twierdząc, że cycloida ABC przecina łukowiec AGFCE na pół.

Jeżeli bowiem by tak nie było, to na pewno jeden z dwóch trzyliniowców FGABC, ABCDE byłby

większy od połowy tego łukowca. Niech tak będzie i przyjmijmy, że jeden z nich (którykolwiek by był) mianowicie ABCDE jest większy niż połowa łukowca. I niech nadwyżka, o którą trzyliniowiec przewyższa połowę łukowca będzie równa pewnej powierzchni K.

Przetnijmy na pół AE w H, następnie HE w I; i niech tak się dzieje dalej dopóki jakiś prostokąt IEC nie okaże się mniejszy od powierzchni K. Wtedy należy całą AE podzielić na części równe IE i przez punkty podziału L, H, I niech przechodzą półokręgi równe półokręgowi CDE, styczne do podstawy w punktach L, H, I, i przecinające cycloidę w punktach O, B, M, przez które przeprowadzamy proste GO, PB, QMD równoległe do podstawy AE.

Będzie



De Cycloide.

89

Eris itaque arcuatum oh ^{estendi-}equale ipsi gl: arcuatum verò bi
equale arcuato ph: & arcuatum me ^{tur infra}equale arcuato qi. Pro-
pterea uniuersa figura inscripta in trilineo abcde constans ex
arcuatis, equalis eris figura eidem trilineo circumscripte, exce-
pto tamen arcuato imrcde. Quod si figura circumscripta ad-
das suum arcuatum imrcde, superabit circumscripta figura ip-
sam inscriptam excessu pradieti arcuati sine rectangulo re, nem-
pe minori excessu quam sit spatium K. Propterea inscripta in tri-
lineo figura adhuc erit plusquam dimidium arcuati agfcde. &
ideo maior quam trilineum fgabc. Sed eadem equalis est alte-
ri figure ex arcuatis compositę & in trilineo fgabc descripta: ^{estendi-}
ergo hæc inscripta figura maior esset suo trilineo fgabc. pars
suo toto. quod esse non potest.

Quod inscripta figura sint equales patet. Nam arcus ol ^{estendi-}equa-
lis est rectę la, hoc est rectę ie, hoc est arcui rm (ob cycloi-
dem.) Ergo arcuatum oh æquale eris arcuato ml. & sic de
singulis.

Si uerò supponeremus trilineum fgabc maius quam dimi-
dium arcuati agfcde, constructio figurę, & demonstratio
penitus eadem erit. Ergo concludemus cycloidem lineam abc
bifariam secare arcuatum agfcde. Quod erat propositum.

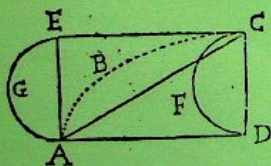
THEOREMA II.

Spatium cycloidale triplum est
circuli sui genitoris.

Est cyclois abc descripta a pũ
cto c circuli cfd. dico spatium a
bcd triplũ esse semicirculi cfd.

Compleatur rectangulum ad
ce; factoque super ae semicircu-
lo age, ducatur ac.

Triangulum adc duplum est semicirculi cfd (nam basis ad
æqualis est peripheriæ cfd ob cycloidem, altitudo uerò dc
æqualis diametro) idcirco rectangulum ed quadruplum erit eius-
dem



O CYKLOIDZIE

89

Będzie przeto łukowiec OH równy takiemuż GL; łukowiec zaś BI równy
łukowcowi PH: i łukowiec ME równy łukowcowi QI. Dlatego też cała
figura składająca się z łukowców i zawarta w trzyliniowcu ABCDE będzie
równa figurze opisanej na tym samym trzyliniowcu, wyłączając jednak
łukowiec IMRCDE. Jeżeli zaś do opisanej figury dodasz ten jej łukowiec
IMRCDE, to przewyższy opisana figura tę wpisaną o wymieniony łukowiec,
czyli prostokąt RE, który oczywiście jest mniejszy od powierzchni K.
Dlatego zawarta w trzyliniowcu figura o tyle będzie większa niż połowa
łukowca AGFCDE i z tej przyczyny większa niż trzyliniowiec FGABC.
Lecz ona równa jest drugiej figurze, złożonej z łukowców i w trójliniowcu
FGABC zawartej: zatem ta omówiona figura byłaby większa od swojego
trójliniowca FGABC, część od swojej całości, co być nie może.

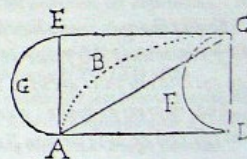
Jasne jest, że omówione figury są sobie równe. Bowiem łuk OL równy
jest prostej LA, to jest prostej IE, to jest łukowi RM (nad cycloidą).

Zatem łukowiec OH będzie równy łukowcowi MS, i tak o każdym z osobna.

Jeżeli zaś przyjmiemy, że trójliniowiec FGADC większy jest niż połowa
łukowca AGFCDE, konstrukcja figury i dowód będzie zupełnie ten sam.
Zatem wyciągamy wniosek, że linia cycloidy ABC przecina na pół łukowiec
AGFCDE. Co było zamierzone.

TWIERDZENIE II

Przestrzeń pod cycloidą jest
trzy razy taka jak koło ją two-
rzące.



Niech będzie cycloida ABC
opisana od punktu C okręgu
CFD. Twierdzę, że powierzchnia
ABCD jest trzy razy większa od
półokręgu CFD.

Utwórzmy prostokąt ADCE; dostawimy do AE półkoła AGE,
poprowadzimy AC.

Trójkąt ADC jest dwa razy większy od półkoła CFD (ponieważ podstawa
AD jest równa obwodowi CFD z cycloidy zaś wysokość DC równa średni-
cy) zatem prostokąt ED będzie cztery razy większy niż

dem semicirculi cfd. Ergo arcuum agecfd quadruplum erit eiusdem semicirculi: propterea trilineum abecd (per lem. in a precedens) duplum erit semicirculi, & componendo spatium abcd triplum erit eiusdem semicirculi cfd.

THEOREMA III.

Omne spatium cycloidi dale triplum est circuli sui genitoris.

Eh cycloidalis linea abc descripta à puncto c semicirculi ced. Di-
re spatium abcd triplum esse semicirculi ced.

Compleatur rectangulum a fcd; factoque semicirculo agf, ut capiatur duo puncta h, & i in diametro cd eque remota à centro, & ducantur hl, ig equidistantes ad ad. que cycloidem secant in quibusvis punctis b, & o. Agantur denique per b, & o duo semicirculi pbq, mon, ut in precedentibus factum est.

Iam recta go, equalis est recte ru (cum aequales sint gr, o u, & communis ro) siue equalis est recte an, nempe arcui on (ab cycloidem) vel arcui pb; siue recte pc, vel th, vel bf.

Eodem prorsus modo, quo demonstravimus rectam go aequalis esse rectae bf, demonstrantur omnes & singulae lineae tri-
lincii fgabc aequales omnibus lineis trilinei abecd. Propterea dicta trilinea inter se aequalia erunt. Ergo ut in precedentibus Theoremate demonstrabitur cycloidale spatium triplum esse semicirculi ced. Quid erat &c.

FINIS.

SCHIO.

to półkole CFD. Zatem łukowie AGECFD będzie cztery razy taki jak to półkole; dlatego trójliniowiec ABCFD (z poprzedzającego lematu) będzie dwa razy większy od połówki koła i, składając, pole ABCD będzie trzy razy większe niż ta połówka koła CFD.

TWIERDZENIE III

Cała przestrzeń cykloidy jest trzy razy taka jak koło ją tworzące.

Niech będzie dana linia cykloidalna ABC opisana punktem C półkole CED. Powiadam, że pole ABCD jest trzy razy takie jak półkole CED.

Narysujmy prostokąt AFCD; zróbmy tak, że półkole AGF oznaczone zostanie w dwóch punktach H oraz I na średnicy CD, równooddalonych od środka i niech będą poprowadzone HL, IG równoodległe od AD, które przecinają cykloidę w jej punktach B i O. Niech będą wreszcie poprowadzone przez B i przez O dwa półkole PBQ, MON podobnie jak poprzednie.

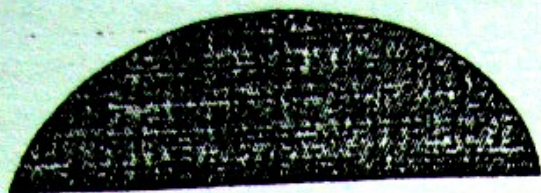
Teraz prosta GO jest równa prostej RU (ponieważ równe są GR, OU a RO jest wspólna) jak również jest równa prostej AN i bez wątpienia łukowi ON (cykloidy) oraz łukowi PB, jak również prostej PC, i TH i BS.

W ten sam sposób, co pokazaliśmy, że prosta GO jest równa prostej BS, pokazemy, że wszystkie i każda z osobna linie trójliniowego pola FGABC są równe wszystkim liniom trójliniowego pola ABCED. Z tego powodu wymienione trójliniowe pola będą równe. Zatem tak jak w poprzednim Twierdzeniu pole pod cykloidą jest trzy razy takie jak półkole CED.

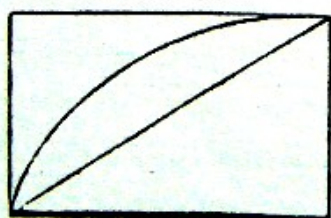
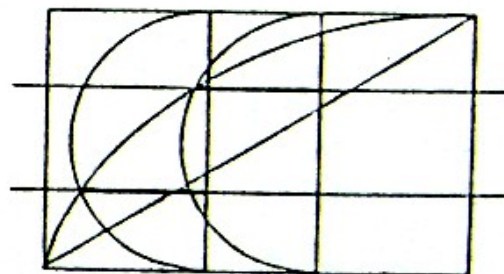
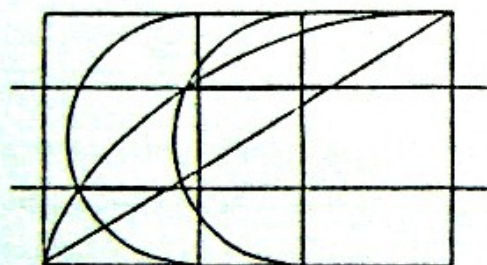
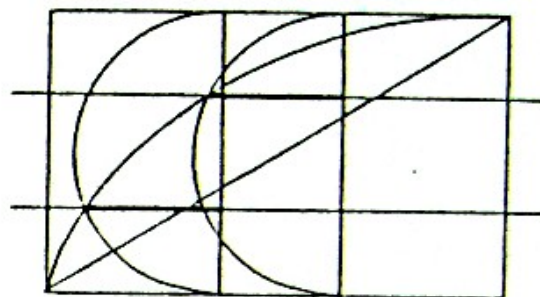
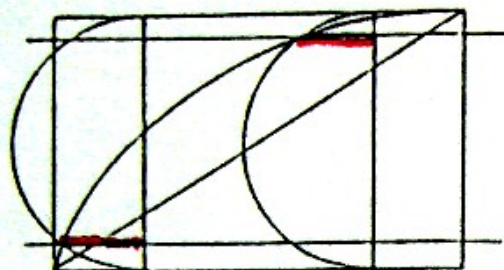
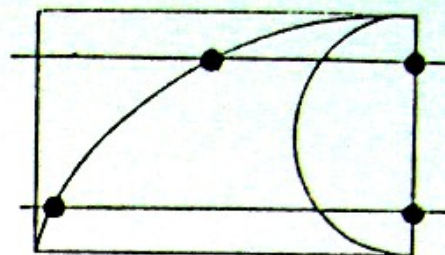
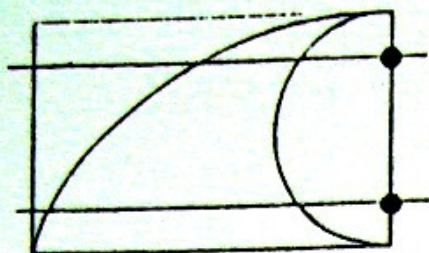
Co było itd.

KONIEC

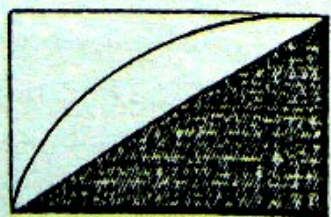
komentarz



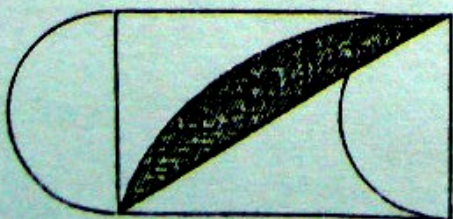
=



=



=

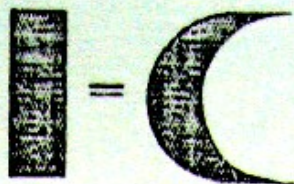


=

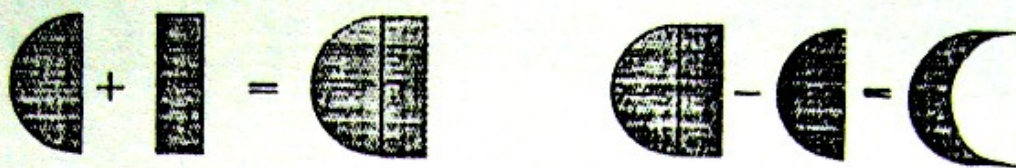


Lemat I

Teza:



Dowód metodą starożytnych:



Lemat II



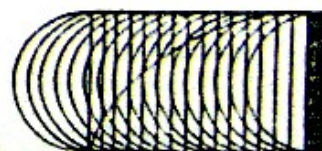
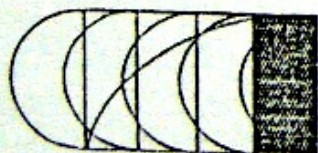
Teza:

Dowód przez "fałszywe założenie" metodą starożytnych

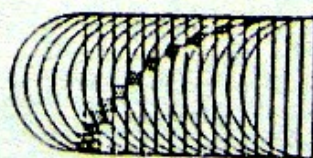
Gdyby



wtedy niech



=



=



<

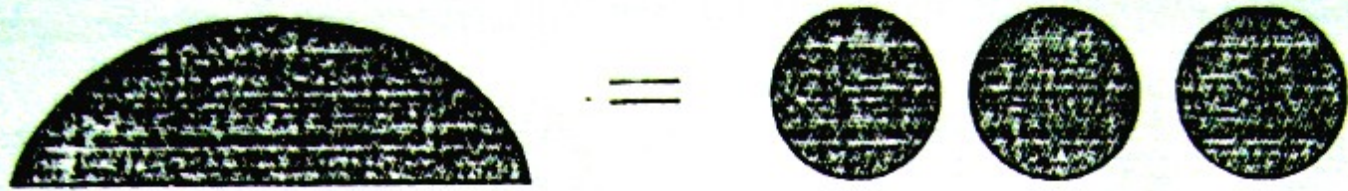


czemu przeczy

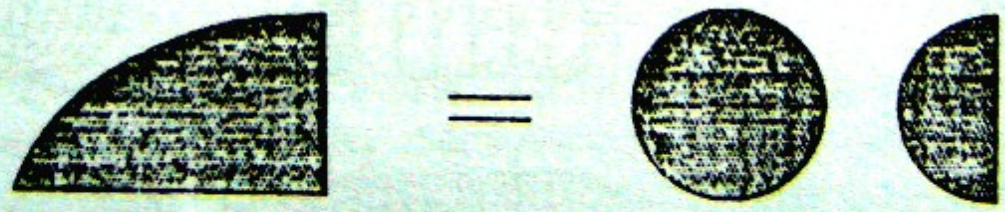
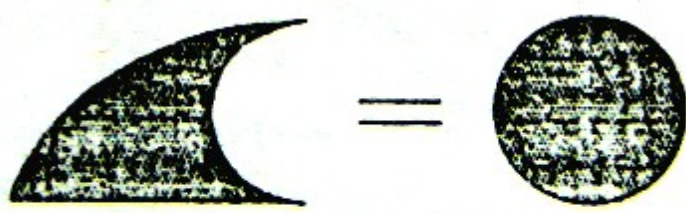
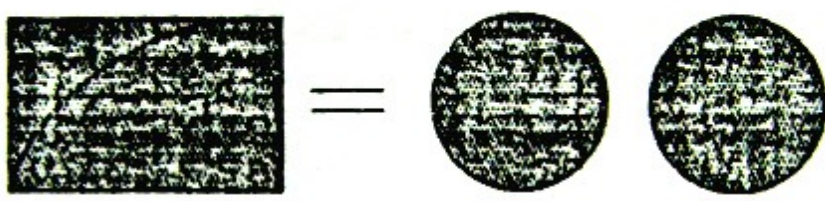


Szkic drugiego dowodu:

Teza:

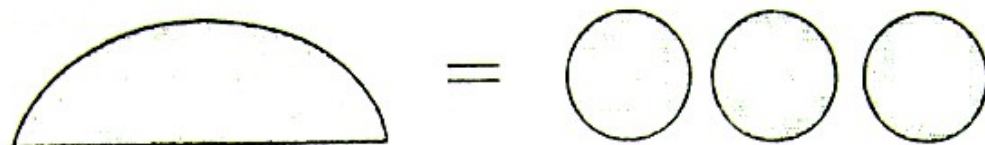


Korzystając z Lematu I i z Lematu II:

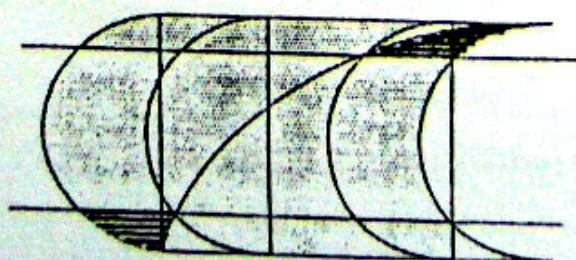
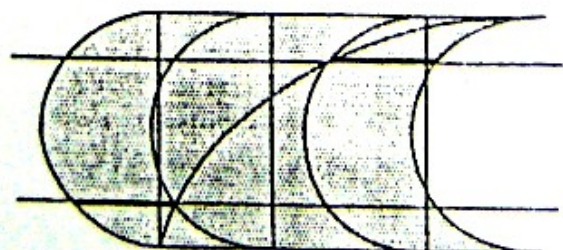
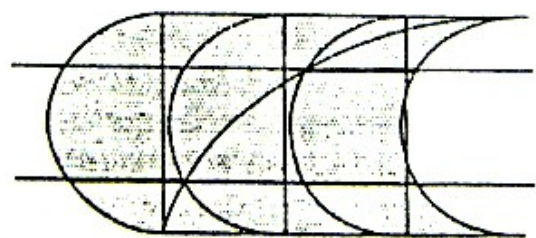
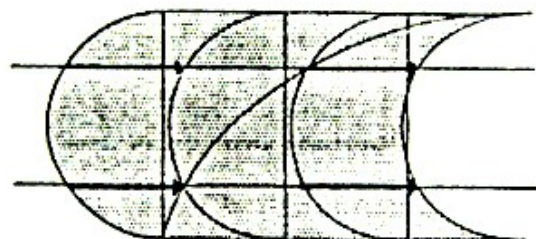
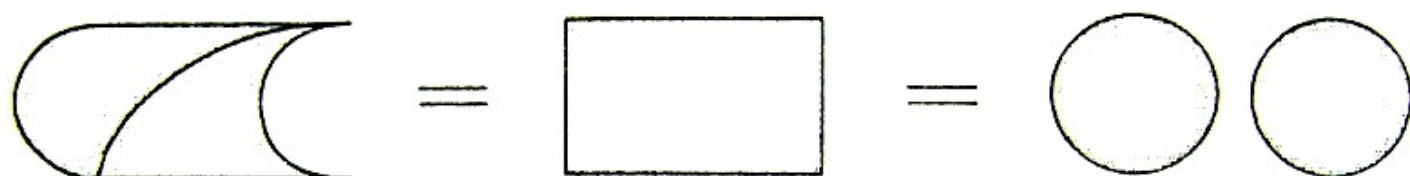


Trzeci dowód

Teza:



Dowód przez inny rozkład na niepodzielne:



1 Wśród tych najprzedniejszych matematyków trzeba wymienić przede wszystkim Galileusza. Galileusz interesował się cykloidą z powodu jej ładnego kształtu, który dawał wdzięczny opis przesłom mostów. W liście do Cavalieriusa, w roku 1639 wspominał o tym. Pisał tam również, że badał tę krzywą od przeszło 50 lat. Prawdopodobnie Torricelli nie wiedział o tym, że we Francji już od kilku lat Roberval miał rozwiązanie tego problemu, obliczył pole zawarte między łukiem cykloidy a jej podstawą, jak również środek ciężkości bryły, która powstaje z obrotu cykloidy wokół jej podstawy, chociaż nie ogłaszał tego drukiem. Jest jednak mało prawdopodobne, żeby Roberval znał wtedy długość łuku cykloidy.

Wzmianka o ważeniu wycinków papieru w kształcie wyznaczonym cykloidą i jej podstawą jest zgodna z tym, co wiemy o Galileuszu i jego stylu: sprawdzanie doświadczalne hipotez i próba dowodu matematycznego.

2 Nawet gdy wynik ważenia byłby bliski liczbie 3, to nie można by na tej podstawie wnioskować, że poszukiwana wartość jest równa 3 lub może wymierna.

3 Tu opis toczenia się koła po linii prostej jest raczej obrazowy, wizualny. Słowo 'linia' zwykle znaczy 'odcinek', czyli kawałek linii prostej. Użyte zostało słowo 'obwód'. Przez toczenie obwód koła przyrównany został do odcinka.

4 W tym czasie cykloida zwana była we Francji trochoidą, używano też francuskiego słowa "Roulotte".

5 Najmniejszy prostokąt zawierający łuk cykloidy ma wymiary $2\pi r$ na $2r$, długość $2\pi r$, wysokość $2r$, jego pole wynosi $4\pi r^2$.

6 Torricelli najwyraźniej jest świadom tego, że mógł już zmęczyć czytelnika dwudziestoma dowodami o paraboli, podaje zatem tylko trzy dowody o kwadraturze pola cykloidy. Jeden z nich, drugi, nie korzysta z zasady Cavalieri'ego. Dwa pozostałe korzystają z tej zasady i są przez to bardzo intuicyjne, wizualne.

'Fałszywe założenie' jest tu nazwą specjalnego przypadku dowodu apagogicznego, przez sprowadzenie do niedorzeczności (Rasiowa 1975). Ten specjalny przypadek polega na tym, że pokazujemy sprzeczność z założeniem. Dowody przez sprowadzenie do sprzeczności nazywane też są 'dowodami nie wprost'. W przeciwieństwie do tych dowodów, często nie dających dobrego wglądu intuicyjnego w 'strukturę', Metoda Niepodzielnych dawała pewien wgląd intuicyjny. Zwróć uwagę, że słowo 'niepodzielny' ma bliski związek semantyczny ze słowem 'atom'.

7 Równoważność rozumiana jest tu przez porównanie powierzchni.

8 Po raz pierwszy pojawia się trójkąt ACF, jego wysokość jest równa $2r$ natomiast podstawa ma πr z czego wynika, że pole jest równe πr^2 .

9 Dowód jest precyzyjny i 'lekki'. Jest to zupełnie inny styl dowodzenia niż współczesne 'siemiężne', 'siłowe' dowody, często spotykane w matematyce szkolnej. Ten dowód apeluje do poczucia szeroko rozumianej symetrii.

10 Podanie 14 z Księgi III Euklidesa:

W kole linie proste równe, na okręgu jego zakończone, są równoodległe od środka; i które linie proste w kole na okręgu jego zakończone są równoodległe od środka, są też między sobą równe.'

11 Mówiąc intuicyjnie, argumentowanie poprzez ruch nie było uznawane przez matematyków w Starożytnej Grecji i nie występowało u Euklidesa. Torricelli też starał się takich argumentacji unikać. Dzisiaj akceptujemy takie rozważania. Jeżeli zachodzi potrzeba, opisujemy to formalnie przez przekształcenia: odbicia, obroty, przesunięcia, jednokładności, zmniejszenia, powiększenia, podobieństwa.

12 Aby mieć lepszy obraz tego rozumowania, warto spojrzeć "szkic dowodu". Zwróć uwagę na wyrażenia „wszystkie linie...”, „... są równe wszystkim liniom”. Te wyrażenia "zapraszają na scenę" zbiory nieskończone.

13 Por. np. Proposition 1 p. 222, Archimedes by Dijsterhuis Princeton University Press 1987

14 Spójrz na szkic do lematu I.

15 Słowo "arcuatum" przełożyliśmy na "łukowiec" gdyż sens jego ma być wizualny. Można by użyć dosadniejszego słowa "garbus"! Spójrz na rysunek.

16 Tu argumentacja jest niejasna i daje 'błędne koło'. Ale następny wywód jest ogólnie prawdziwy (17). Spójrz na ikoniczne przedstawienie tej argumentacji. Oczywiście Torricelli mógłby łatwo użyć tu metody niepodzielnych Cavalieri'ego, ale w drugim dowodzie i lematach (twierdzeniach pomocniczych) do tego dowodu nie chciał tego czynić.

17 Spójrz na szkic do lematu I.

18 Lemat II jest przygotowaniem gruntu pod drugi dowód, przez sprowadzenie do niedorzeczności.

Pokazana jest sprzeczność z założeniem, czyli przygotowano warunki do zastosowania reguły Claviusa.

19-23 Zwróć uwagę na styl. Torricelli nie ma jeszcze, tak jak my, ogólnego, przejrzystego pojęcia liczby rzeczywistej. Liczba jest u niego zawsze liczbą 'czegoś'. Zamiast 'dowolnej liczby epsilon', do której dobiera się 'deltę', Torricelli zaznacza sobie wizualnie, 'pewną przestrzeń K' i do niej dobiera podział podstawy, po której toczy się koło tworzące cykloidę. Ten podział jest tak drobny, że widać, że różnica pomiędzy obszarami, które powstają z podziału cykloidy dużego łukowca jest mniejsza od 'przestrzeni K'. Moglibyśmy na tym dowód zakończyć. Relacja $<$ dla liczb jest bowiem dla nas chlebem powszednim, czymś bardzo konkretnym i posługujemy się nią z pewnym zaufaniem. Liczba, która jest od jakiejś liczby mniejsza, nie może być jednocześnie tej liczbie równa. Albo mniejsza albo równa. Ta sprzeczność kończy dowód.

Ale Torricelli i jego współcześni nie operowali takimi pojęciami z dostateczną pewnością. Wolał więc powołać się na Pewnik 9. z Księgi I Euklidesa:

9. 'Całość, większa jest od swojej części.'

Jego argumentacja jest przejrzysta. Można ją przedstawić ikonicznie. Cykloida przechodzi przez małe łukowce i powstaje przy tym narysunku coś w rodzaju 'naszyjnika'. Duży łukowiec jest podzielony przez cykloidę na dwie części w taki sposób, że różnica między nimi nie jest większa niż ten 'naszyjnik'. Przyjmujemy, że ta różnica jest równa ustalonej *przeźroczliwości* K . Tymczasem dzieląc coraz drobniej podstawę cykloidy możemy udowodnić, że jest mniejsza od K . Otrzymujemy więc sprzeczność.

Spójrz na szkice do lematu II.

24-25 Tym razem wydaje się, że cykloida została narysowana z prawa na lewo. Mając dwa lematy już udowodnione bez powoływania się na Zasadę Niepodzielnych, możemy przeprowadzić drugi dowód nie powołując się na tę Zasadę.

26 Rysowanie linii AC jest tu raczej zbędne. Pasowałoby to lepiej przy pierwszym dowodzie. Tu by wystarczyło zwrócenie uwagi na linię kropkowaną ABC i lemat II, o tym, że linia ta dzieli duży łukowiec AGECFD na równe (co do powierzchni) części.

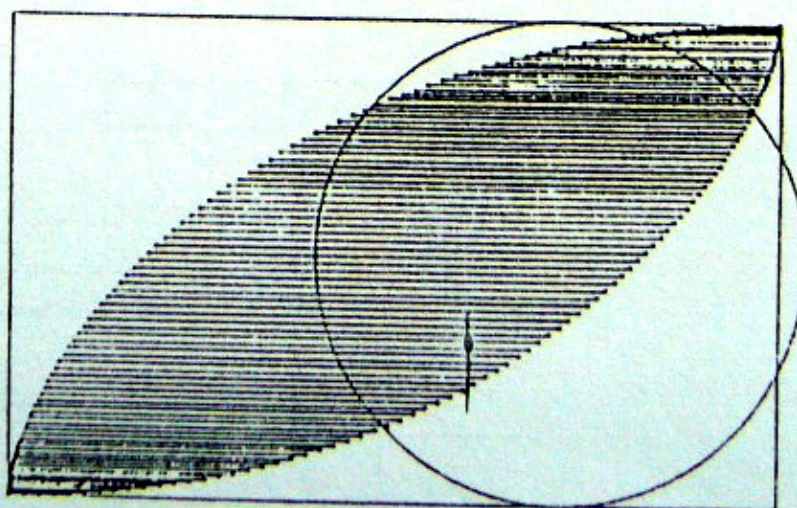
28-32 W trzecim dowodzie Torricelli wraca do Zasady Niepodzielnych. Wiele osób uważa, że ten trzeci dowód jest najłatwiejszy. W dowodzie tym znów widać powoływanie się na szeroko rozumianą symetrię. Spójrz na szkic do dowodu III. Zwróć uwagę, że etymologicznie "niepodzielny" znaczy tyle co "atom".

Uwagi i komentarze

Dowody Torricellego są jedynymi opublikowanymi dowodami z pierwszej połowy XVII wieku. Dowody Roberval'a, spisane przez jednego z jego uczniów opublikowane zostały dopiero po jego śmierci, w roku 1693, w 'Traite des mouvements composez'. Ich styl jest wyraźnie inny.

Zarówno dowody podane przez Torricellego, jak i te podane przez Roberval'a nie stanowią pełnej kolekcji dowodów z tego okresu. Również Kartezjusz podał swój dowód na pole cykloidy. Wiadomo, że był inny niż dowody Roberval'a i Torricellego.

Patrząc na tę kolekcję z dzisiejszego punktu widzenia, trzeba dodać jeszcze jeden dowód oparty na takim rysunku i Zasadzie Niepodzielnych:



Nie znaleźliśmy jednak tego dowodu w źródłach z XVII wieku.

Informację o pierwszeństwie Roberval'a w sprawie pola pod łukiem cykloidy mamy np. z listu Mersenne'a do Kartezjusza z roku 1638 i z listu do Fermata, jak również z innych źródeł. Nie wiemy jednak nic istotnego z tych źródeł o samym rozwiązaniu. Roberval trzymał je w tajemnicy, bo obawiał się konkurencji przy kandydowaniu na stanowisko profesorskie w College Royale de France. Musiał stawać do konkursu o to stanowisko co trzy lata.

Pascal w swojej 'Histoire de la Roulotte', (Historia cykloidy) pisał, że wymiana listów między Robervalem a Mersennem, Mersennem a Kartezjuszem i Mersennem a Fermatem była wcześniejsza ale prawdopodobnie się mylił.

Pascal bardzo ostro zarzucał Torricellemu plagiat, ale jak się wydaje nie miał racji. Dowody i styl Torricellego różnią się znacznie od dowodów i stylu Roberval'a. Wprawdzie Roberval używał "niepodzielnych" ale unikał zbiorów nieskończonych. Jego język był finitystyczny. Torricelli pisał tak, jakby nie stawiał sobie takich ograniczeń. Najprawdopodobniej ich drogi były niezależne.

Zgodnie z tym, co podawał Pascal, Roberval powiązał cykloidę z inną krzywą, którą po łacinie nazwał 'socia', a po francusku 'la compagne' — towarzyszką cykloidy. Ta krzywa nazywa się dzisiaj po prostu sinusoidą. Można łatwo zobaczyć, że towarzyszący cykloidzie ma środek symetrii dokładnie w środku prostokąta, który rysowaliśmy już wiele razy, i który zawiera połowę cykloidy. Towarzyszka dzieli więc prostokąt na dwie równe co do powierzchni części. Każda z nich jest równa tarczy koła. Z drugiej strony powierzchnia między cykloidą a jej towarzyszką jest równa połowie toczącego się koła, co widać z Zasady Niepodzielnych. Dostownie 'pokazuje' nam to 'połówka' toczącego się koła. Taka była prawdopodobnie oryginalna argumentacja Roberval'a.

Niektóre fragmenty z cytowanych źródeł

• Johannis Groeningii D. **Historia Cycloidis**

que ... am primus ejusdem inventor Gallileus, et demonstrator Torricelli fuerit... discutitur
1701 Br L. 529. b. 18

page 12-13:

Adest Epistola Gallilei anno 1639 die 24 Febr. ad D. Cavalerium scripta, quā praedicta confirmatur, & inter alia de Cycloide haec leguntur:

"Quella linea arcuata sono piu di quarant anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi d'un Ponte. Feci sopra di essa, & sopra lo spazio di lei, e dalla sua corda compreso diversi tentativi per dimonstrarne qualche passione & parvenni da principio, che tale spazio potesse esser triplo del cerchio, che lo descrive, ma non fu così, benché la differenza non sia molta."

• Jana D. Groeningiusza **Historia Cykloidy**, którą wynalazł Galileusz a dowodami opatrzył Torricelli, wydana w roku 1701
str. 12-13:

Jest list Galileusza z 24 lutego, 1639, do Pana Cavaleriusa, gdzie potwierdza się to, co napisane powyżej, i gdzie m.i. o cykloidzie można przeczytać:

„O tej linii łukowatej myślałem już od przeszło 40 lat, aby ją opisać, i podziwiałem jej piękny kształt, który można by nadawać przęsłom mostów. Pracowałem nad tym usilnie, i nad tym, jaka jest jej przestrzeń, i jej rozciągłość liniowa i podejmowałem różne próby dowodów i doszedłem do spostrzeżenia, że ta przestrzeń może być trzy razy taka, jak koło, które ją opisuje, ale okazało się, że tak nie jest, chociaż różnica nie jest duża”

W tejże księdze jest uwaga o innym liście Galileusza do Cavalieri'ego z dnia 14. lutego 1640:

"Mi sono stati mandati di Parigi due quesiti de quei Matematici, circa qualitemo di farmi poco onore, perche mi pajono cura disperate. L'uno e la misura della superficie del cono scaleno, L'altro la misura di quella linea curva simile alla curvatura d'un Ponte, descritta dalla rivoluzione d'un cerchio, sine che scorra con tutta sua circonferenza una linea retta & c. e dello spazio piano compreso de quella; e del corpo generato per la rivoluzione intorno a l'asse, e alla base, il che mi ricordo, que una volta mi domandó lei, ma che infrottosamente mi vi affatacai. Di grazia mi dice se sá, que questa due cose siano state dimonstrate da sei ano, perche per quello ch'io vedo mi pajono difficilissime."

„Dostałem wiadomość z Paryża, o dwóch problemach od Matematyków wysokiej jakości, co nie robi mi zaszczytu, ponieważ poświęciłem temu wiele troski. Jeden dotyczy miary powierzchni stożka skośnego, drugi miary tej linii krzywej, która krzywizną przypomina mosty, opisana przez obrót koła bez poślizgu całym swoim obwodem po linii prostej i jej miary płaskiej, i bryły utworzonej przez obrót tej krzywej wokół osi i wokół jej podstawy, o co jak pamiętam pewnego razu pytałem ich, ale usiłowania były bez rezultatu. Z wdziękiem mi powiedziano, że te dwa problemy są już rozwiązane od sześciu lat, ale z tego co wiem były wielce trudne."

Leon Auger (1962), w książce **'Nierozpoznany Uczony, Gilles Personne Roberval, 1602-1675'** przytacza list Mersenne'a do Kartezjusza, z 28 kwietnia, 1628:

„Co do Pana Roberval'a, to doszedł on do kilku ładnych nowych rezultatów w geometrii i w mechanice, i między innymi powiem Panu, że udowodnił, że przestrzeń ograniczona linią krzywą ACB i prostą AB jest trzy razy taka jak koło AEF; ta przestrzeń jest zaznaczona przez koło, które przechodzi od A do B, na płaszczyźnie lub na linii AB, gdy linia AB jest równa obwodowi koła. A potem udowodnił w jakim stosunku jest ta przestrzeń do tego koła, gdy koło toczy się po AB, większym lub mniejszym od obwodu 'w jakiegokolwiek jest dany proporcji' "...

« Quant au Sier de Roberval il a trouvé quantité de belles speculations nouvelles tent géométriques que mécaniques, et antr' autres, le vous diray une, à sçauoir qu'il a démontré que l'espace compris par la ligne courbe ACB et la droite AB est triple du cercle ou de la roue ou roulette AEF; or ledit espace est fait par le roulette qui se meut depuis A iusques à B, sur le plan ou sur la ligne AB, lorsque la ligne AB est égale à la circonférence de ladite roulette. Et puis il a démontré la proportion de cet espace avec ledit circle, lorsque la roulette décrit AB plus grand ou plus petit que la circonférence "in quaeusque ratione data" ... »

Miesiąc później, 27 maja, 1638, Kartezjusz odpowiedział, że „uwaga jest ładna”.

Niestety dodał do tego: „nie wiem czy jest o co robić tyle hałasu, gdy się znalazło coś tak łatwego, że ktokolwiek, kto zna odrobinę geometrii, nie mógłby tego przeoczyć, pod warunkiem, że tego szuka.

I zaraz potem podał rozwiązanie bardzo krótkie, oparte na metodzie wyczerpywania, Archimedes'a. I aby dotknąć swojego przeciwnika, napisał:

„gdybym chciał się chwalić z powodu znalezienia czegoś takiego, to równie dobrze mógłbym to robić z tego powodu, że oglądam jabłko, które dopiero co przekroiłem na pół, bo przecież nikt inny przede mną tego jeszcze nie oglądał."

